Clase D: La geometría de las funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$(secc.6.1)

C.J. Vanegas

11 de junio de 2008

Sea T una aplicación diferenciable tal que $T : D^{\subset}\mathbb{R}^2 * \to \mathbb{R}^2$. Sea $D = T(D^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x, y) = T(x^*, y^*), \text{ para algún } (x^*, y^*) \in D^*\}$.

Estamos interesados en observar como T cambia D^*. Por ejemplo si: $D^* = \{(r, \theta) : \ r \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi$ $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, y $T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$, entonces

Figura 1:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & = & r\cos\theta & , & 0 \leq & r & \leq 1 \\ y & = & r\sin\theta & , & 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{D}(\overline{0}, 1)$$

$x^2 + y^2 = r^2 \leq 1 \Rightarrow D = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Figura 2:

Método útil para describir $D = T(D^*)$.

Sea $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ con $\det(A) \neq 0$ y sea T una $\underline{\underline{\text{aplicación lineal}}}$ (transformación lineal) de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $T\overline{x} = A\overline{x}$. Entonces: T transforma paralelogramos en paralelogramos y vértices en vértices. Además si $T(D^*)$ es un paralelogramos, D^* tiene que ser un paralelogramo. En efecto, un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ se puede describir como el conjunto de puntos $q = p + \lambda v + \mu w$, $\lambda, \mu \in (0, 1)$, p, v, w vectores en $\mathbb{R}^2$ y $v \neq kw$.

Figura 3:

Entonces $T(q) = T(p) + \lambda T(v) + \mu T(w)$, que describe un paralelogramo. Por ejemplo si $T(u, v) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$, $T(e_1) = (1/2, 1/2)$, $T(e_2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, y $D^* = [0, 2] \times [-1, 1]$. Entonces T es transformación lineal y $T(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T(0,-1) &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ T(2,-1) &= (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \\ T(2,1) &= (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \\ T(0,1) &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Figura 4:

Aplicación inyectiva

Una aplicación T es inyectiva en D^* si para todo (u,v) y $(u',v') \in D^*$, $T(u,v) = T(u',v')$ $\Rightarrow u = u'$ y $v = v'$. Es decir, T no aplica dos puntos distintos de D^* sobre el mismo punto de D.

Por ejemplo: $T(x,y) = (x,0)$ no es inyectiva pues $T(2,3) = (2,0) = T(2,5)$, pero $(2,3) \neq (2,5)$.

Ejemplo 1. *Sea $T(u,v) = (-u^2+4u, v)$. ¿Es T inyectiva?*

Solución 1. *Sea $T(u,v) = T(\tilde{u},\tilde{v}) \Rightarrow (-u^2+4u,v) = (-\tilde{u}^2+4\tilde{u},\tilde{v}) \Rightarrow v = \tilde{v}$ y $-u^2+4u = -\tilde{u}^2+4\tilde{u} \Rightarrow u^2-4u = \tilde{u}^2-4\tilde{u} \Rightarrow u^2-4u+4 = \tilde{u}^2-4\tilde{u}+4 \Rightarrow (u-2)^2 = (\tilde{u}-2)^2 \Rightarrow$*

$$|u-2| = |\tilde{u}-2| = \begin{cases} \tilde{u}-2 \\ 2-\tilde{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-2 = \tilde{u}-2 \;\Rightarrow\; u = \tilde{u} \\ u-2 = 2-\tilde{u} \;\Rightarrow\; u = \boxed{4-\tilde{u}} \end{cases}$$

Tome $\tilde{u} = 1 \Rightarrow u = 3 \Rightarrow T(3,0) = T(1,0)$ pero $(3,0) \neq T(1,0)$. No es inyectiva.

Pero si restringimos el dominio de T a $[0,1]\times[0,1]$, entonces sí es inyectiva:

$$\begin{aligned}(\underbrace{u-2}_{<0})^2 = (\underbrace{\tilde{u}-2}_{<0})^2 \;&\Rightarrow\; (\underbrace{2-u}_{>0})^2 = (\underbrace{2-\tilde{u}}_{>0})^2 \\ &\Rightarrow\; 2-u = 2-\tilde{u} \;\Rightarrow\; u = \tilde{u}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2. *$T(u,v) = (4u, 2u+3v)$.*

Solución 2. *$T(u,v) = (u',v') \Rightarrow (4u,2u+3v) = (4u',2u'+3v') \Rightarrow$* $\left.\begin{array}{l} 4u = 4u' \Rightarrow u = u' \\ 2u+3v = 2u'+3v' \end{array}\right\}$ *$\Rightarrow 3v = ev' \Rightarrow v = v'$. Sí es inyectiva.*

Aplicación sobreyectiva.

La aplicación $T : \operatorname{Dom} T \to D$ es sobreyectiva sobre D si para cada $(x,y) \in D$ existe al menos un punto $(u,v) \in \operatorname{Dom} T$ tal que $(x,y) = T(u,v)$.

- Si T es sobreyectiva, dado $(x,y) \in D$ podemos resolver la ecuación $T(u,v) = (x,y)$ en (u,v). Si además T es inyectiva esta solución es única.
- Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es transformación lineal, entonces T es inyectiva $\Leftrightarrow$ T es sobreyectiva.

Ejemplo 3. *Sea $T(u,v) = (4u, 2u+3v)$ y $D = \{(x,y) : \; 0 \le x \le 4, \; \frac{1}{2}x+3 \le y \le \frac{1}{2}x+6\}$. Hallar un dominio D^* tal que $T(D^*) = D$.*

Solución 3. *T es lineal ($T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$). Sabemos por un ejemplo anterior que T es 1-1. Entonces T es sobre $\Rightarrow$ podemos encontrar D^*. Dado $(x,y) \in D$ queremos encontrar $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(u,v) = (x,y)$, es decir, $(4u, 2u+3v) = (x,y) \Rightarrow$*

$$\begin{array}{r} x = 4u \\ y = 2u + 3v \end{array} \Rightarrow \boxed{u = \tfrac{1}{4}x} \text{ y } 2y - x = 6v \Rightarrow \boxed{v = \tfrac{2y-x}{6}}.$$

Como $0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4}x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$.

Como $\frac{1}{2}x + 3 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 6 \Rightarrow x + 6 \leq 2y \leq x + 12 \Rightarrow 6 \leq 2y - x \leq 12 \Rightarrow 1 \leq \frac{2y-x}{6} \leq 2$ $\Rightarrow 1 \leq v \leq 2$.

Luego: $D^* = \{(u,v) : \ 0 \leq u \leq 1, \ 1 \leq v \leq 2\} = [0,1] \times [1,2]$.

Ejemplo 4. *Sea $T(u,v) = (u - uv, uv)$ y D la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ y $x + y = 4$. ¿Existe D^* tal que $T(D^*) = D$?*

Solución 4.

Figura 5:

T es 1-1: $T(u,v) = T(u',v') \Rightarrow (u - uv, uv) = (u' - u'v', u'v') \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} u - uv = u' - u'v' \\ uv = u'v' \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow u = u'$ y $v = v'$ si $u, u' \neq 0$.

T no es lineal. Para cada $(x,y) \in D$ queremos encontrar (u,v) tal que $T(u,v) = (x,y)$

$$\Rightarrow (u - uv, uv) = (x,y) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = u - uv \\ y = uv \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{u = x + y} \\ y = (x+y)v \Rightarrow \boxed{v = \frac{y}{x+y}} \end{array}$$

$$1 \leq x + y \leq 4 \Rightarrow 1 \leq u \leq 4. \text{ Si } \left.\begin{array}{l} \text{Si } y = 0 \ \Rightarrow \ v = 0 \\ \text{Si } x = 0 \ \Rightarrow \ v = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq v \leq 1.$$

Figura 6:

$D^* = [1,4] \times [0,1]$.

Por el teorema de la función inversa (caso particular del teorema de la función implícita), si el determinante de $DT(u_0, v_0) \neq 0$ entonces para $(u, v) \sim (u_0, v_0)$ y $(x, y) \sim (x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ se puede resolver de forma única en (u, v) como función de (x, y). En particular por unicidad T es inyectiva, además T es sobreyectiva en un entorno de (x_0, y_0). En nuestro ejemplo anterior: $T(u, v) = (u - uv, uv) = (x, y) \Rightarrow DT(\underbrace{u_0, v_0}_{w_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(w_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(w_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(w_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(w_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v_0 & -u_0 \\ v_0 & u_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ DT(U_0, v_0) = \begin{vmatrix} 1 - v_0 & -u_0 \\ v_0 & u_0 \end{vmatrix} = (1 - v_0)u_0 + u_0 v_0 = 1 \neq 0 \Rightarrow T(u, v) = (x, y)$ se puede resolver de manera única.

Ejemplo 5. *Sea* $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. $D = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 - 4x \leq 0\}$. *¿Existe* D^* *tal que* $T(D^*) = D$*?*

Solución 5. $|DT(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$ *si* $r \neq 0 \Rightarrow$ *podemos resolver* $T(r, \theta) = (x, y) \in D$ *de forma única.*

$$\left.\begin{array}{r} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}.\ D:\ (x - 2)^2 + y^2 \leq 4$$

Figura 7:

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. $x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta \leq 0 \Rightarrow \boxed{r \leq 4\cos\theta} \Rightarrow 0 \leq r \leq 4\cos\theta$.

$D^* = \{(r, \theta) : \ 0 \leq r \leq 4\cos\theta, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

Figura 8:

SEcción 6.2

Queremos obtener una medida de cómo una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ distorsiona el área de una región. Esta medida la da el determinante Jacobiano.

Definición 1 (Determinante Jacobiano)**.** *. Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una trasformación de clase C^1 dada por $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. El determinante Jacobiano de T, denotado por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es el determinante de $DT(u,v)$, la matriz derivada de T:*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 6. *Para* $T : \begin{array}{l} x = -U^2 + 4u \\ y = v \end{array}$.

Solución 6.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -2u+4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2u + 4$$

Ejemplo 7. *Para* $T(u,v) = (u - uv, uv)$.

Solución 7.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

Ejemplo 8. *Para* $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Solución 8.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

- El determinante Jacobiano para un cambio de coordenadas polares es $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$
- Afirmamos que para $T : D^* \xrightarrow{1-1} D$, $T \in C^1$,

$$A(D) = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

  $A(D)$ se obtiene dividiendo D en rectángulos pequeños, sumando sus áreas y finalmente tomando el límite de esta suma cuando el tamaño de los subrectángulos tiende a cero.

Como T puede transformar rectángulos en regiones cuya área no sea fácil de calcular, aproximamos las imágenes de esos subrectángulos por medio de regiones elementales cuya área podamos calcular. Para esto usamos la derivada de T pues sabemos que ella es la mejor aproximación lineal a T.

Ahora considere:

Figura 9:

$$T(u_0, v_0) + T' \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \sim T(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \quad T(u_0, v_0) + T' \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} + T' \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} \sim T(u, v) \\
&\equiv \quad T(u_0, v_0) + T'(\Delta u_i) + T'(\Delta v_j) \sim T(u, v) \\
&\equiv \quad T(u_0, v_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u}_{\Delta u\, Tu} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v}_{\Delta v\, Tv} \sim T(u, v)
\end{aligned}$$

El área del paralelogramo de vértice $T(u_0, v_0)$ y lados $\Delta u Tu$ y $\Delta v Tv$ es: $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix} =$

$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v$

Es decir el área de $T(R^*)$ es aproximadamente igual a $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Delta u \Delta v|$ (evaluado en (u_0, v_0)).

Si ahora tengo

$A(D^*) \sim \sum \Delta u \Delta v$.

$A(D) = A(T(D^*)) \sim \sum |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| \Delta u \Delta v \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad \displaystyle\iint_{D^*} |\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}| \, dudv$

Figura 10:

Figura 11:

- En coordenadas polares:

  $A(D) \sim \sum r_{ij} \Delta r \Delta \theta \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \iint\limits_{D^*} r \, dr d\theta.$

Ejemplo 9. *Si* $T : D^* \longrightarrow D$, $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. $D = \{(x,y) : \ x^2+y^2 \leq 9\}$, $D^* = [0,3] \times [0,2\pi]$.

Solución 9. *Entonces sabemos* $A(D) = \pi r^2 = 9\pi$. *Por la fórmula:*

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint\limits_{D^*} |\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^3 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2} \, d\theta = \frac{9}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi = 9\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 10. *Sea* $T : D^* \longrightarrow D$, $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. $D^* = \{(u,v) : \ u^2+v^2 \leq 1, \ u \geq 0, \ v \geq 0\}$

I *Hallar* $D = T(D^*)$

II *Calcular* $\iint_D dxdy$.

Solución 10.

- T no es lineal.

- T es 1-1 y sobre localmente:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 \neq 0$$

  Si $u \neq 0$ o $v \neq 0$.

- $\left.\begin{array}{c} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = u^4 + v^4 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = (u^2+v^2)^2 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 \leq 1$. Como $u \geq 0$, $v \geq 0 \Rightarrow y = 2uv \geq 0$. Por lo tanto $D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\}$. $A(D) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

Figura 12:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D} dxdy &= \iint\limits_{D^*} 4u^2 + 4v^2 \, dudv = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} 4(u^2+v^2) \, dvdu \\ &= 4 \int_0^1 u^2 v + \left.\frac{v^3}{3}\right|_0^{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 4 \int_0^1 u^2\sqrt{1-u^2} + \frac{(1-u)^{3/2}}{3} \, du = \cdots = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\iint\limits_{D^*} 4\underbrace{(u^2+v^2)}_{r^2} \, dudv = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r^2 r \, d\theta dr = 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 1$, $|J| = r$, $T : D^{**} \rightarrow D^*$, $T(r,\theta) = (\underbrace{r\cos\theta}_{u}, \underbrace{r\sin\theta}_{v})$.